§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Определение и вычисление двойного интеграла. Пусть функция $z=f(P)=f(x, y)$ задана в некоторой ограниченной замкнутой области D на плоскости xOy. Разобьем эту область сеткой кривых на ячейки $s_1, s_2, \ldots, s_n$. В каждой ячейке s_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и умножим значение функции f в этой точке на площадь Δs_i ячейки s_i. Сумма таких произведений по всем ячейкам

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i$$

называется *интегральной суммой*.

Обозначим через $d(s_i)$ диаметр ячейки s_i, т. е. расстояние между наиболее удаленными точками этой ячейки; $\max d(s_i)$ — наибольший из диаметров всех ячеек данного разбиения.

Двойным интегралом $\iint\limits_D f(P)\,ds$ от функции $f(P)$ *по области* D называется предел интегральных сумм при условии $\max d(s_i)\to 0$, т. е. при неограниченном увеличении числа ячеек, когда все ячейки стягиваются в точку,

$$\iint\limits_D f(P)\,ds=\lim_{\max d(s_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i.$$

Если такой предел существует, то функция $f(P)$ называется *интегрируемой* в области D. Всякая непрерывная в ограниченной замкнутой области D функция $f(P)$ интегрируема в ней. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только непрерывных функций.

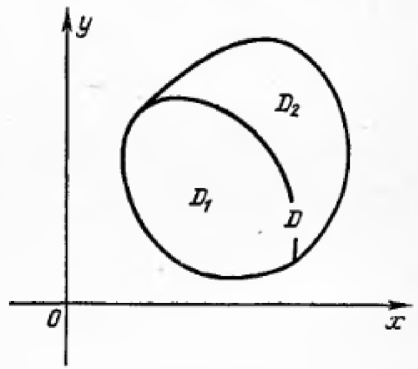

Рис. 174

Простейшие свойства

1) Если $f(P)=Cf_1(P)$, то

$$\iint\limits_D f(P)\,ds=C\iint\limits_D f_1(P)\,ds.$$

2) Если $f(P)=f_1(P)\pm f_2(P)$, то

$$\iint\limits_D f(P)\,ds=\iint\limits_D f_1(P)\,ds\pm\iint\limits_D f_2(P)\,ds.$$

3) Если область D состоит из двух областей D_1 и D_2 (рис. 174), то

$$\iint\limits_D f(P)\,ds=\iint\limits_{D_1} f(P)\,ds+\iint\limits_{D_2} f(P)\,ds.$$

В декартовых координатах элемент площади ds обычно записывается в виде $ds=dx\,dy$, а двойной интеграл обозначают

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Область D на плоскости xOy назовем *простой областью*: 1) (относительно оси Ox) если она ограничена сверху линией $y=\varphi_2(x)$, снизу $y=\varphi_1(x)$ [функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны] и с боков отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ (рис. 175); в частных случаях один из этих отрезков (или оба вместе) могут превратиться в точку (рис. 176);

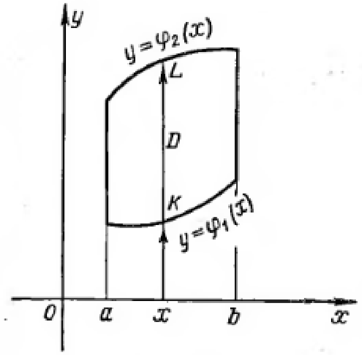

Рис. 175

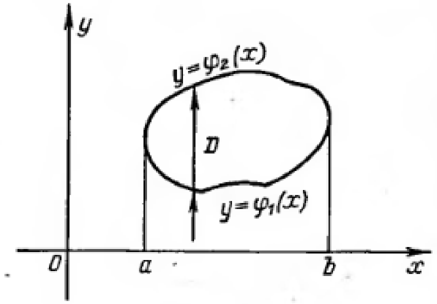

Рис. 176

2) (относительно оси Oy), если она ограничена слева линией $x=\psi_1(y)$, справа $x=\psi_2(y)$ [функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны] и сверху и снизу отрезками прямых $y=d$ и $y=c$ (рис. 177, 178).

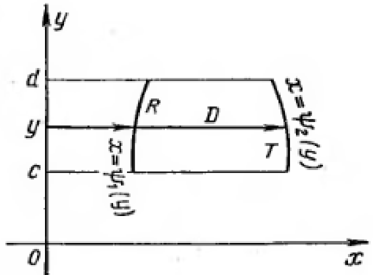

Рис. 177

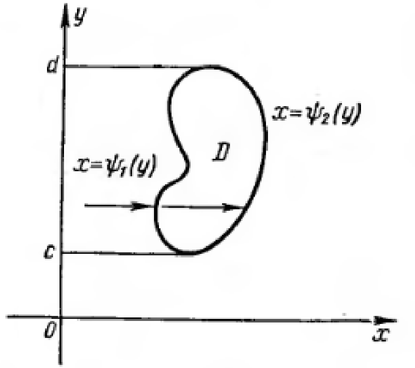

Рис. 178

В случае простой области вида 1) всякая прямая, параллельная оси Oy и проходящая внутри отрезка $[a, b]$, пересекает границу области в двух точках (см. рис. 175). Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (1)$$

Здесь внутренний интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ берется по y при фиксированном, но произвольном в отрезке $[a, b]$ значении x от нижней границы области D до ее верхней границы (т. е. по отрезку KL). В результате получается некоторая функция от x, которая интегрируется затем по отрезку $[a, b]$.

Если же область D есть простая область вида 2), то всякая прямая, параллельная оси Ox и проходящая внутри отрезка $[c, d]$, пересекает границу области в двух точках (см. рис. 177). Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{2}$$

Наиболее простой вид формулы (1) и (2) принимают в случае прямоугольной области D, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ (рис. 179):

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx. \tag{3}$$

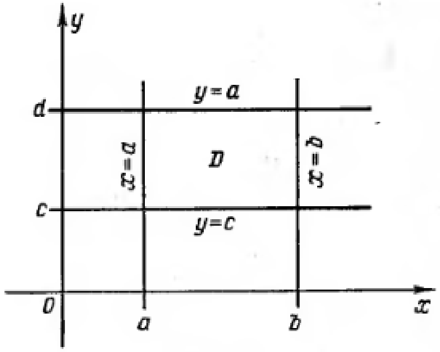

Рис. 179

Следует заметить, что если область D не является простой областью, то ее разбивают на конечное число простых областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ и при вычислении двойного интеграла по области D используется третье свойство двойного интеграла.

Замечание. Аналогичные определения и формулы могут быть получены и тогда, когда область D лежит либо в плоскости xOz, либо в плоскости yOz. Например, если ограниченная замкнутая область D лежит в плоскости xOz и является простой относительно оси Oz, а в ней задана непрерывная функция $y = f(x, z)$, то

$$\iint\limits_D f(P)\,ds = \iint\limits_D f(x, z)\,dx\,dz = \int\limits_e^h dz \int\limits_{\chi_1(z)}^{\chi_2(z)} f(x, z)\,dx$$

и т. д.

При изучении материала § 1—6 необходимо учитывать это замечание.

1631. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y^3)\,dx\,dy$ по прямоугольной области D, ограниченной прямыми $x=1$, $x=2$, $y=0$ и $y=2$.

Решение. Вычисляем данный интеграл по формуле (3):

$$\iint\limits_D (x+y^3)\,dx\,dy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 (x+y^3)\,dy.$$

Внутренний интеграл вычисляем, считая x постоянным:

$$\int\limits_0^2 (x+y^3)\,dy = \left(xy + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = x\cdot 2 + \frac{2^4}{4} = 2x+4.$$

Полученную функцию от x интегрируем по отрезку $[1, 2]$:

$$\iint\limits_D (x+y^3)\,dx\,dy = \int\limits_1^2 (2x+4)\,dx = \left(2\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_1^2 =$$

$$= 2^2+4\cdot 2-1-4 = 4+8-1-4 = 7.$$

Обычно вычисление внутреннего интеграла отдельно не делают, а все выкладки записывают в одну строку следующим образом:

$$\iint\limits_D (x+y^3)\,dx\,dy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 (x+y^3)\,dy = \int\limits_1^2 \left(xy + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (2x+4)\,dx = (x^2+4x)\Big|_1^2 = 4+8-1-4 = 7.$$

Такой записью мы и будем пользоваться в дальнейшем.

1632. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{y}{z}\,dy\,dz$, если область D ограничена параболами $z=y^2$ и $y=z^2$.

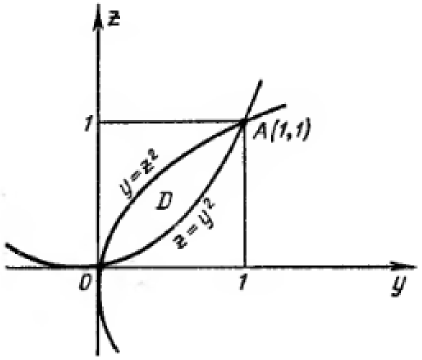

Рис. 180

Решение. Область D (рис. 180) — простая относительно оси Oy. Она имеет нижнюю границу $z=y^2$ и верхнюю границу $y=z^2$, т. е. $z=\sqrt{y}$ (перед радикалом ставим только знак «+», так как область D находится в той части плоскости yOz, где $z>0$). При любом фиксированном значении y из отрезка $[0, 1]$ z меняется от $z=y^2$ до $z=\sqrt{y}$, поэтому имеем

$$\iint\limits_D \frac{y}{z}\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{y}{z}\,dz = \int\limits_0^1 y(\ln z)\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 y(\ln\sqrt{y} - \ln y^2)\,dy = \int\limits_0^1 y\left(\frac{1}{2}\ln y - 2\ln y\right) dy = -\frac{3}{2}\int\limits_0^1 y\ln y\,dy =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}y^2\ln y\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^2\frac{dy}{y}\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

Интеграл $\int y\ln y\,dy$ взят методом интегрирования по частям, причем при

2. Перемена порядка интегрирования. Если область D является простой как вида 1), так и вида 2), то применимы обе формулы (1) и (2), следовательно,

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx.$$

Иными словами, *повторное интегрирование не зависит от порядка интегрирования.* Этим обстоятельством часто пользуются при вычислении двойного интеграла, выбирая ту из двух формул, которая приводит к более простым выкладкам.

В качестве упражнения на расстановку пределов полезна задача о перемене порядка интегрирования в повторном интеграле

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy.$$

Прежде всего следует начертить область интегрирования D, которая находится в полосе между прямыми $x=a$ и $x=b$ и ограничена снизу линией $y=\varphi_1(x)$, а сверху — линией $y=\varphi_2(x)$. Затем область D проектируют на ось Oy и находят уравнения прямых $y=c$ и $y=d$, ограничивающих снизу и сверху полосу, в которой расположена область D, затем находят левую границу области D $x=\psi_1(y)$ и правую $x=\psi_2(y)$. Если какая-либо из этих границ состоит из двух или большего числа линий, записанных разными уравнениями, то область D приходится разбивать на части, а интеграл — на сумму интегралов по этим частям.

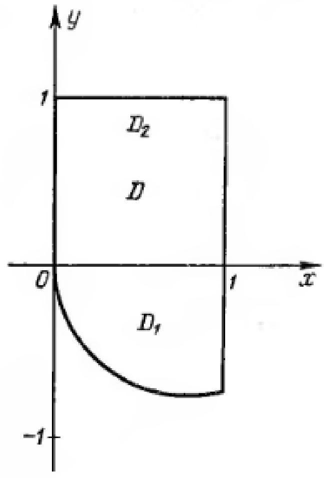

Рис. 182

Аналогично, если требуется переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx,$$

то, спроектировав область D на ось Ox, находят уравнения прямых $x=a$ и $x=b$, нижнюю границу области D $y=\varphi_1(x)$ и верхнюю $y=\varphi_2(x)$. Иногда область D приходится разбивать на части, а интеграл — на сумму интегралов по этим частям.

1640. В двойном интеграле $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ расставить пределы для того и другого порядка интегрирования по области D, ограниченной прямыми $x=0$, $x=1$, $y=1$ и кривой $y=-\sqrt{2x-x^2}$.

Решение. Область D (рис. 182) находится в полосе между прямыми $x=0$ и $x=1$. Нижняя граница — дуга окружности $y=-\sqrt{2x-x^2}$, верхняя — прямая $y=1$. Следовательно,

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,\ y)\,dy.$$

Область D проектируется на ось Oy в отрезок $[-1,\ 1]$. Левая граница области имеет уравнение $y=-\sqrt{2x-x^2}$, т. е.

$$x=1-\sqrt{1-y^2}\ \text{ при }\ -1\leqslant y\leqslant 0\ \text{ и }\ x=0\ \text{ при }\ 0\leqslant y\leqslant 1.$$

Правая граница $x=1$. Разбивая область D на две части D_1 и D_2, а интеграл — на сумму двух интегралов, получим

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0} dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,\ y)\,dx+\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,\ y)\,dx.$$

3. Замена переменных в двойном интеграле. При вычислении двойных интегралов иногда бывает полезно сделать замену переменных. Пусть

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{4}$$

— функции, определенные на всей плоскости xOy или в некоторой ее области D и имеющие непрерывные частные производные в области D. Допустим также, что систему уравнений (4) можно однозначно разрешить относительно x и y:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v); \tag{5}$$

тогда каждой точке $M(x, y)$ из области D будет взаимно однозначно соответствовать пара чисел (u, v), называемых криволинейными координатами этой точки. Если область D расположена в той части плоскости xOy, в которой введены криволинейные координаты u, v, то справедлива следующая формула:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f[x(u, v);\ y(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv, \tag{6}$$

где D' — область изменения криволинейных координат u и v, отвечающая области D, а $J(u, v)$ — якобиан преобразования (5):

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

В частности, в полярных координатах формулы (5) имеют вид

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{7}$$

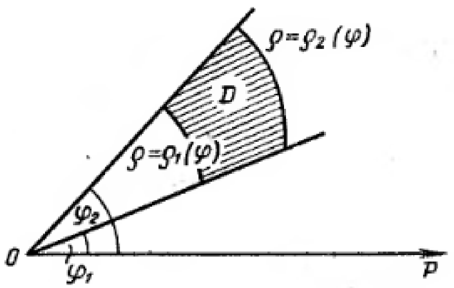

Рис. 185

Система (7) осуществляет переход от прямоугольных координат x и y к полярным координатам ρ и φ при условии, что полюс помещен в начале координат и полярная ось направлена вдоль оси Ox. В этом случае $|J| = \rho$, и формула (6) принимает вид

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\varphi\,d\rho.$$

Если область D ограничена лучами, образующими с полярной осью углы φ_1 и φ_2 $(\varphi_1 < \varphi_2)$, и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi))$ (рис. 185), то соответствующие этой области полярные координаты изменяются в пределах

$$D'\ \{\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\}$$

и тогда

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho. \tag{8}$$

Если область D охватывает начало координат, то

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho, \tag{9}$$

где $\rho = \rho(\varphi)$ — полярное уравнение кривой, ограничивающей область D.

Формулы (8) и (9) удобно использовать при решении задач, когда область D есть круг или сектор круга.

Если область D лежит в плоскости xOz или в плоскости yOz, то в обоих случаях $|J| = \rho$, но для плоскости xOz формулы перехода к полярным координатам имеют вид

$$x = \rho\cos\varphi, \quad z = \rho\sin\varphi,$$

а для плоскости yOz

$$y = \rho\cos\varphi, \quad z = \rho\sin\varphi.$$

1651. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\,dx\,dy,$$

если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Область D есть круг радиуса 1 с центром в начале координат. Введем полярные координаты. В полярных координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$ [см. формулы (7)] и уравнение окружности принимает вид $\rho = 1$. Тогда по формуле (9) получаем

$$\iint_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3}\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление площадей плоских областей. Площадь S плоской области D на плоскости xOy вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_D dx\,dy.$$

1662. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной прямой $y=2$ и параболой $y=x^2-1$.

Решение. Область D (рис. 186) можно проектировать и на ось Ox и на ось Oy; спроектируем ее на ось Oy. Область D симметрична относительно оси Oy, поэтому достаточно вычислить площадь правой половины области D и результат удвоить. Правая половина области D проектируется на ось Oy в отрезок $[-1,\ 2]$ и имеет левой границей прямую $x=0$, а правой — линию $y=x^2-1$, или $x=\sqrt{y+1}$. В результате

$$\frac{S}{2}=\int\limits_{-1}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y+1}}dx=\int\limits_{-1}^{2}x\Bigg|_{0}^{\sqrt{y+1}}dy=\int\limits_{-1}^{2}\sqrt{y+1}\,dy=\frac{2}{3}\,(y+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{2}=2\sqrt{3},$$

откуда $S=4\sqrt{3}$.

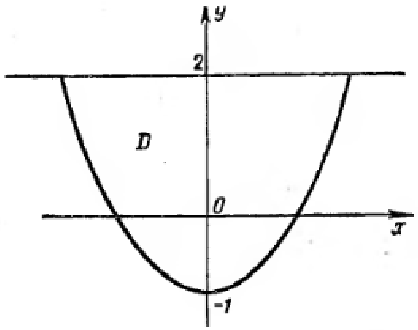

Рис. 186

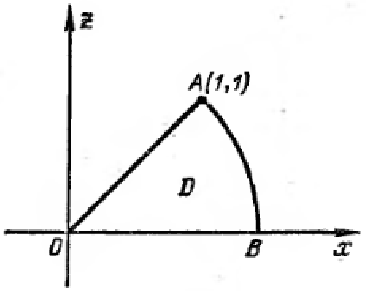

Рис. 187

1663. Вычислить площадь плоской области D (рис. 187), ограниченной прямыми $z=0$, $z=x$ и окружностью $x^2+z^2=2x$.

Решение. Введем полярные координаты $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$. Уравнение окружности, ограничивающей область D, имеет вид $\rho^2=2\rho\cos\varphi$, или $\rho=2\cos\varphi$. Угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{4}$ и ρ меняется от 0 до $2\cos\varphi$. Тогда получаем

$$S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}\rho d\rho=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{0}^{2\cos\varphi}d\varphi=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

1669. Параболой $z^2=x+2$ и прямой $x=2$.

1670. Кривой $(y^2+z^2)^2=2a^2(y^2-z^2)$.

1671. Кривой $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$.

1672. Кривой $(x^2+z^2)^3=4x^2z^2$.

Указание. В 1669—1672 учесть симметрию области D.

2. Вычисление объемов. Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,\ y)$ а снизу — областью D плоскости xOy (рис. 190), находится по формуле

$$V=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Если тело не является цилиндрическим, то его разбивают на цилиндрические части.

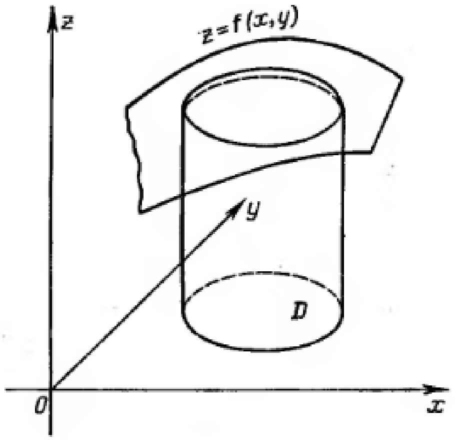

Рис. 190

1673. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z=0$, $y+z=2$ и цилиндром $y=x^2$.

Решение. Данное тело (рис. 191) сверху ограничено плоскостью $z=2-y$, поэтому

$$V=\iint\limits_D (2-y)\,dx\,dy.$$

Область D есть параболический сегмент, ограниченный в плоскости xOy прямой $y=2$ и параболой $y=x^2$. Спроектируем область D на ось Oy. Тогда, с учетом симметрии тела относительно плоскости yOz, получим

$$\frac{V}{2}=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}}(2-y)\,dx=\int\limits_0^2 (2-y)\,x\Big|_0^{\sqrt{y}}dy=\int\limits_0^2\left(2\sqrt{y}-y\sqrt{y}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^2=2y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}-\frac{y}{5}\right)\Big|_0^2=4\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=8\sqrt{2}\cdot\frac{2}{15}=\frac{16\sqrt{2}}{15},$$

откуда $V=\frac{32\sqrt{2}}{15}$.

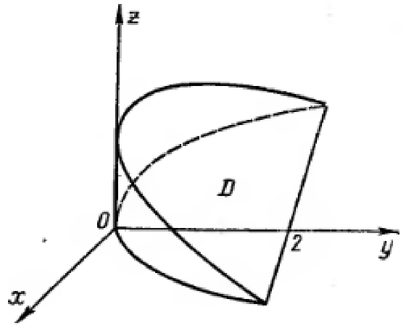

Рис. 191

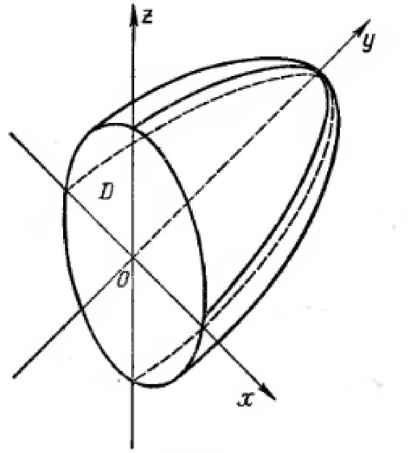

Рис. 192

1674. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $y=0$ и параболоидом $y=3-x^2-z^2$.

Решение. В этой задаче удобно считать, что тело «стоит» на плоскости xOz и «сверху» (рис. 192) ограничено параболоидом $y=3-x^2-z^2$, поэтому

$$V=\iint\limits_D (3-x^2-z^2)\,dx\,dz.$$

Область D есть круг; его границу $x^2+z^2=3$ получим подстановкой $y=0$ в уравнение $y=3-x^2-z^2$. В полярных координатах уравнение этой окружности имеет вид $\rho^2=3$, или $\rho=\sqrt{3}$.

Учитывая симметрию тела относительно плоскостей xOy и yOz, найдем

$$\frac{V}{4}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}(3-\rho^2)\,\rho d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(3-\rho^2)^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{9}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{9}{4}\,\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9\pi}{8},$$

откуда $V=\frac{9\pi}{2}$.